28/3/2019

Διάλεξη

Μιγαδικές Συναρτήσεις I.

Η $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, συνεχής στο $a \in D \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D \ |z-a| < \delta \ |f(z) - f(a)| < \varepsilon$

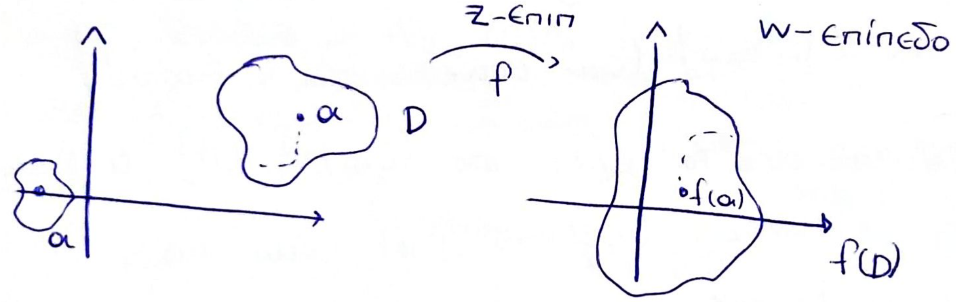
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D(a, \delta) : f(z) \in D(f(a), \varepsilon)$

$\iff \forall (z_n) \subset D$, $z_n \to a$, $f(z_n) \to f(a)$

$\iff$ Ref, Imf $: D \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $a \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$ συνεχές στο (a_1, a_2)

$[a = a_1 + i a_2]$

$\iff$



<u>Παρατήρηση</u> Η έννοια της συνέχειας μιας μιγ. συνάρτησης είναι <u>επέκταση</u> της έννοιας μιας πραγμ. συναρτ.

Ιδιαίτερα σημαντικά εργαλεία στην πράξη

(1) Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων f, g συνεχής στο a.

$\Rightarrow f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ συνεχείς στο a μόνο αν $g(a) \neq 0$

(2) Σύνθεση συνεχών είναι συνεχής.

Σημαντικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων

(1) ταυτοτική $(z \mapsto z)$ συνάρτηση συζυγούς $(z \mapsto \bar{z})$

συνάρτηση φανταστικού μέρους $(z \mapsto \operatorname{Im} z)$, συνάρτηση πραγμ. μέρους $(z \mapsto \operatorname{Re} z)$

, Ρητές συναρτ. του z (όπου ορίζονται), συνάρτηση απολ. τιμής $(z \mapsto |z|)$

$$\left[\xrightarrow[\text{\& σύνθεση συνεχών}]{\text{άλγεβρα}} \right]$$, πολυώνυμα του z,

και όλες οι συναρτήσεις που προκύπτουν από τις παραπάνω μέσω αλγ.

και σύνθεση συνεχών.

(2) εκθετική $z \mapsto e^z = e^{Re z} e^{i Im z} = e^{Re z}(\cos(Re z) + i \sin(Im z))$

(προφανώς, χρησιμοποιούμε και τις ιδιότητες συνεχών πραγμ. συναρτήσεων. πραγμ μτβ)

SOS

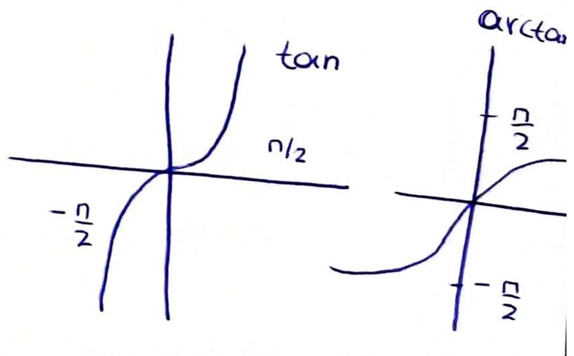
(3) Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος $Arg: \mathbb{C}/\{0\} \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$

Είναι συνεχής στο $\mathbb{C} | (-\infty, 0]$ (και ασυνεχής στα $x \in (-\infty, 0]$)

Είχαμε ορίσει 1-1 και επί από το $\mathbb{C}/\{0\}$ στο $(0,\infty) \times (-\pi, \pi]$ το μετασχ.

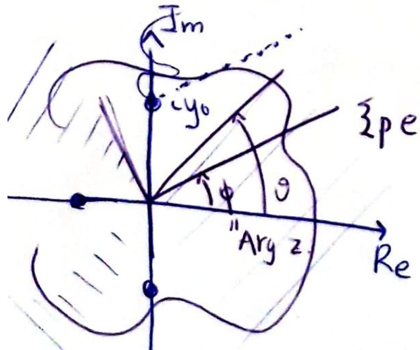
από καρτεσιανές σε πολικές $(x,y) \mapsto (r, \phi)$ μέσω της

$$\phi = Arg(x+iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x>0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0, y>0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & x<0, y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0, y<0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & x<0, y<0 \end{cases}$$



Πράγματι, από τη συνέχεια της $\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

[Δεδομένη] και άλγεβρα συνεχών πραγμ. συναρτήσεων.



Έχουμε ότι η $z \mapsto Arg z$ είναι συνεχής στο δεξί ανοιχτό ημιεπίπεδο.

στο δεύτερο και στο τρίτο (ανοιχτό) τεταρτημόριο.

Όμως στο σημείο $iy_0 \in \{z \in \mathbb{C} : Re z = 0, Im z \geq 0\}$

ανοιχτός θετικός ημιάξονας φανταστ.)

Έχουμε για $z_n = x_n + iy_n \to iy_0 \iff x_n \to 0 \wedge y_n \to y_0 > 0$

με $y_n>0$ $\forall n\geq n_0$ και κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$:

$$\left|\mathrm{Arg}(z_n) - \underbrace{\mathrm{Arg}(iy_0)}_{=\frac{\pi}{2}}\right| = \begin{cases} \left|\arctan\frac{y_n}{x_n} - \frac{\pi}{2}\right|, & x_n>0 \\ 0, & x_n=0 \\ \left|\pi+\arctan\frac{y_n}{x_n}-\frac{\pi}{2}\right|, & x_n<0\end{cases} = \begin{cases} \left|\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y_n}{|x_n|}\right|, & x_n\neq 0 \\ 0, & x_n=0\end{cases}$$

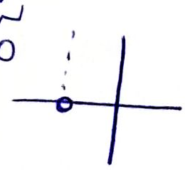
$$< \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y_n}{\frac{1}{n}+|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow$ Η $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}/\{0\} \to (-\pi,\pi]$ είναι συνεχής σε σημεία iy_0, $y_0>0$

και με ανάλογη απόδειξη συνεχής σε σημεία iy_0, $y_0<0$.

Όμως για $z_0=x_0<0$ η $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\}: (-\pi,\pi]$ <u>δεν</u> είναι συνεχής, αφού

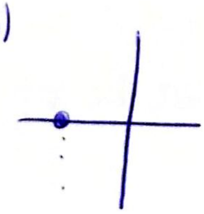
για $x<0$: $\mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \pi+\arctan\frac{y}{x}, & y\geq 0 \\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & y<0\end{cases}$ $\Longrightarrow$ για $z_n = x_n + i\underbrace{y_n}_{\geq 0} \to x_0<0$



$(\Longleftrightarrow x_n \to x_0<0 \wedge y_n\to 0)$

Έχουμε $\mathrm{Arg}\, z_n \to \pi = \mathrm{Arg}(x_0)$

Ενώ για $z_n = x_n + i\underbrace{y_n}_{<0} \to x_0$



$(\Longleftrightarrow x_n\to x_0 \wedge \underbrace{y_n}_{<0}\to 0)$ Έχουμε $\mathrm{Arg}\, z_n \to -\pi \neq \mathrm{Arg}(x_0)$

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ:

(1) <<Περνώντας>> από το δεύτερο τεταρτ. στο τρίτο βλέπουμε ότι η Arg παρουσιάζει <<άλμα>> κατά -2π

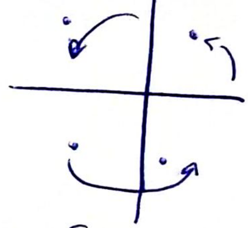
$\left(Arg\left(x_0+i\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} Arg(x_0)=\pi \ , \ Arg\left(x_0-i\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\pi\right)$

Αν θέλουμε να το διορθώσουμε
δηλ να <<περνάμε>> από τον αρνητικό ημιάξονα των πραγματικών χωρίς <<άλμα>>) θα μπορέσουμε να ορίσουμε τη συν/ση $f(z)=\begin{cases} Arg\, z & Im z>0 \\ Arg\, z+2\pi & Im z<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ δηλ έχουμε, έτσι συνεχή επέκταση της $Arg z$ στο αριστερό ημιεπιπ. <<πάνω>> ή <<πέρα>> από τον αρν. ημιάξονα των πραγμ.

$\Rightarrow$ μπορούμε από το τρίτο στο τέταρτο στο πρώτο στο δεύτερο τεταρτ. κατά συνεχή τρόπο με την $Arg z+2\pi$, αλλά τότε

$Arg z_n+2\pi \longrightarrow 3\pi$ για $z_n \to x_0<0$ με $Im z_n>0$.



$\Rightarrow$ συνεχίζοντας έτσι μπορούμε να έχουμε συνεχή <<συν/ση>> στο $\mathbb{C}/\{0\}$ αλλά αυτή θα είναι πλειονότιμη ή πολύκλαδη

$$arg : \mathbb{C}/\{0\} \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{Z}} \left((-\pi,\pi]+2k\pi\right)$$

$$arg\, z := \{arg_k z := Arg\, z+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}.$$

όπου $arg_k : \mathbb{C}/\{0\} \to (-\pi,\pi]+2k\pi$, είναι οι διάφοροι κλάδοι της πολυκλ. συν/σης του ορίσματος arg (χωρίς k) με $Arg_0 = Arg$

(2) Η $Arg : \mathbb{C}/\{0\} \to (-\pi,\pi]$ είναι προφανώς φραγμένη (και επί) και ότι $Arg(\rho e^{i\theta})=\theta$, $\rho>0$, $\theta\in(-\pi,\pi]$

$\Rightarrow$ για $z_n=\rho_n e^{i\theta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ($\Leftarrow \rho_n \to 0$) έχουμε $Arg\, z_n = \theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

$\forall\ \theta\in(-\pi,\pi] \Rightarrow$ η Arg <<παίρνει>> οριακά ανάλογα με την ακτίνα.

Πάνω στην οποία κινούμαι κάθε τιμή $\theta \in (-\pi, \pi]$ για $z_n \to 0$

$\Rightarrow$ Δεν διορθώνεται και η ασυνέχεια της Arg στο 0.